ENSA-ALHOCEIMA
ANALYSE 3

CP II
SEMESTRE 1

Exercice 1 :

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en (0,0).

Exercice 2 :

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ g(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que g est continue en (0,0).

Exercice 3 :

Montrer que les limites suivantes n'existent pas

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x-y}{|x+y|}\right)$$

Exercice 4 :

Soit E un espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E telles que :

$N_1 \leq CN_2$ avec C une constante strictement positive.

1- Montrer que la fonction $f: (E, N_1) \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$f(x) = N_1(x)$$

est continue sur E.

2- La fonction $g: (E, N_2) \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$g(x) = N_1(x)$$

est-elle continue sur E ?

3- Dans quel cas peut-on assurer la continuité de la fonction :

$h: (E, N_1) \to \mathbb{R}^+, \quad h(x) = N_2(x)$ sur E ?

Exercice 5 :

Considérons la fonction f suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & si \quad y \leq |x| \\ x^4 & si \quad y > |x| \end{cases}$$

1- Déterminer le domaine de définition de f.

2- Soit $(x_0, y_0) \epsilon \mathbb{R}^2$ fixé.

a- Montrer que f est continue si $y_0 > |x_0|$ et $y_0 < |x_0|$.

b- Supposons que $y_0 = |x_0|$,
montrer que f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si $x_0{}^4 = y_0{}^2$

c- en déduire les valeurs de x_0 pour lesquelles f est continue en (x_0, y_0).

Exercice 6 :

Déterminer D_f l'ensemble de définition de f et étudier sa continuité sur D_f dans les cas suivants :

1- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x|y|$

2- $f:]0,1[^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \begin{cases} x(1-y) & si \quad y \leq x \\ (1-x)y & si \quad y > x \end{cases}$

3- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y) \to (xsiny, y + x, y^5)$

4- $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \to \left(yz, x\sqrt{z}, \frac{y}{x}\right)$

5- $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 7 :

1- Montrer que la fonction : $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par :

$$f(x, y) = \frac{2xy}{1 + e^{(x^2+y^2)}}$$

est bornée sur $\mathbb{R}^2$.

Serie 01 :

Exercice 01 :

Montrons que : $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2 ; |x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$

Ceci est équivalent à : $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$

on a : $|x| = |x-y+y|$

D'après l'inégalité triangulaire, on trouve

$|x| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$ (1)

D'une autre part, on a :

$|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x|$

$\Rightarrow -|y-x| \leq |x|-|y|$

Or $|y-x| = |x-y|$

D'où $-|x-y| \leq |x|-|y|$ (2)

D'après (1) et (2) on obtient

$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$

D'où le résultat.

Exercice 02 :

01/ Mq, $\forall (x,y,z)\in E^3 : d(x,y) \geq |d(x,z)-d(z,y)|$

ceci est équivalent à

$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$

Puisque d est une distance, alors :

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\Rightarrow d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$

Or $d(y,z) = d(z,y)$

d'où $d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$ (1)

D'une autre part on a :

$d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y)$

$\Rightarrow -d(x,y) \leq d(z,x) - d(z,y)$

$\Rightarrow -d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y)$ (2)

D'après (1) et (2), on trouve :

$d(x,y) \geq |d(x,z) - d(z,y)|$

02/ Mq, $\forall n \geq 2$, $\forall (x_1, x_2, \dots x_n)\in E^n$

$d(x_1,x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$

Par récurrence on a :

* Pour $n=2$

Soient $(x_1,x_2)\in E^2$

on a $\sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}) = d(x_1,x_2)$

Donc, $d(x_1,x_2) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$

* Soit $n\geq 2$,

supposons que ~~$\forall (x_1, \dots, x_n)\in E^n$~~

$d(x_1,x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$

et mq : $\forall (x_1, \dots, x_{n+1})\in E^{n+1}$

$d(x_1,x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i,x_{i+1})$

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1})\in E^{n+1}$

d'après l'inégalité triangulaire, on a

$d(x_1,x_{n+1}) \leq d(x_1,x_n) + d(x_n,x_{n+1})$

en utilisant l'hypothèse de récurrence,

on trouve : $d(x_1,x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1}) + d(x_n,x_{n+1})$

$d(x_1,x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i,x_{i+1})$

* D'après le principe de récurrence

on a. $\forall n\geq 2$, $\forall (x_1, \dots, x_n)\in E^n$

$d(x_1,x_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d(x_i,x_{i+1})$

équivalentes

Exercice 03 :

Montrons que d est une distance sur E.

On a : (1.1) d'après la définition de d $\forall (P,Q) \in E^2$. $d(P,Q) \in \{0,1,2,3\}$

d'où $\forall (P,Q) \in E^2$; $d(P,Q) \geq 0$

(1.2) On a. si $P=Q$ alors $d(P,Q)=0$

donc $\forall P$ dans E $d(P,P)=0$

(1.3) On a, clairement,

$d(P,Q)=0 \Rightarrow P=Q$

(1-4) $\forall (P,Q) \in E^2 : d(P,Q) = d(Q,P)$

(1-5) Mq : $\forall (P,Q,R) \in E^3$

$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$

On va traiter le quatre cas suivants : $d(P,Q)=0$, $d(P,Q)=1$

$d(P,Q)=2$, $d(P,Q)=3$

1er cas : Si $d(P,Q)=0$

Mq : $d(P,R)+d(R,Q) \geq 0$

Comme $d(P,R) \geq 0$ et $d(R,Q) \geq 0$

alors, $d(P,R)+d(R,Q) \geq 0$

2ème cas : Si $d(P,Q)=1$

Mq : $d(P,R)+d(R,Q) \geq 1$

Par l'absurde, supposons que :

$d(P,R)+d(R,Q) < 1$

or, $d(P,R)+d(R,Q) \in \mathbb{N}$,

Donc $d(P,R)+d(R,Q)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} d(P,R)=0 \\ d(R,Q)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P=R \\ R=Q \end{cases}$

$\Rightarrow P=Q$

[illegible]dit le fait que $d(P,Q)=1$

3ème cas : Si $d(P,Q)=2$

Mq : $d(P,R)+d(R,Q) \geq 2$.

Par l'absurde, supposons que

$d(P,R)+d(R,Q) < 2$

donc, $d(P,R)+d(R,Q) \in \{0,1\}$

d'après ce qui précède,

* $d(P,R)+d(R,Q)=0 \Rightarrow P=Q$

contradiction avec $d(P,Q)=2$.

* Si $d(P,R)+d(R,Q)=1$

alors $\begin{cases} d(P,R)=0 \\ d(R,Q)=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} d(P,R)=1 \\ d(R,Q)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} P=R \\ d(P,Q)=1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} d(P,Q)=1 \\ R=Q \end{cases}$

ceci contredit : $d(P,Q)=2$.

4ème cas : Si $d(P,Q)=3$

Mq : $d(P,R)+d(R,Q) \geq 3$

Par absurde, supp que : $d(P,R)+d(R,Q) < 3$

Donc, $d(P,R)+d(R,Q) \in \{0,1,2\}$

d'après ce qui précède.

* $d(P,R)+d(R,Q) \in \{0,1\}$

$\Rightarrow d(P,Q) \in \{0,1\}$

contradiction avec $d(P,Q)=3$

* Si $d(P,R)+d(R,Q)=2$

alors $\begin{cases} d(P,R)=0 \\ d(R,Q)=2 \end{cases}$ ① ou $\begin{cases} d(P,R)=2 \\ d(R,Q)=0 \end{cases}$ ②

ou $\begin{cases} d(P,R)=1 \\ d(R,Q)=1 \end{cases}$ ③

Pour ① et ②, on trouve

$d(P,Q)=2$ et ceci contredit

le fait que $d(P,Q)=3$

- Pour ③, on a $\begin{cases} d(P,R) = 1 \\ d(R,Q) = 1 \end{cases}$
- on pose : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$Q(X) = a'X^2 + b'X + c'$$

$$R(X) = a''X^2 + b''X + c''$$

Donc $\begin{cases} d(P,R) = 1 \\ d(R,Q) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a'' \\ a'' = a' \end{cases} \Rightarrow a = a'$

absurde, puisque $d(P,Q) = 3$

Finalement : $\forall (P,Q,R) \in E^3$:

$$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$$

donc d est une distance sur E

Exercice 04 :

01/- Mq $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$

Pour $N_\infty \leq N_2$

Soit $P \in \mathbb{K}[X] / P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

Mq : $N_\infty(P) \leq N_2(P)$

ceci est équivalent à :

$$\sup |a_i| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2}$$

on va montrer que $N_\infty^2(P) \leq N_2^2(P)$

on a : $\begin{cases} N_\infty^2(P) = (\sup |a_i|)^2 = \sup(|a_i|^2) \\ N_2^2(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \end{cases}$

on sait que $\forall j \; 0 \leq j \leq n \;\; |a_j|^2 \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2$

donc $\sup_{0 \leq j \leq n} (|a_j|^2) \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2$

d'où $N_\infty^2(P) \leq N_2^2(P)$

c/c : $N_\infty(P) \leq N_2(P)$.

Pour $N_2 \leq N_1$

Mq : $\sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2} \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i|$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)^2$$

on a : $\left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)^2 = \left(|a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|\right)^2$

$$= |a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} |a_i||a_j|$$

Donc, $(N_1(P))^2 = (N_2(P))^2 + Q$

avec $Q \geq 0$

D'où $N_\infty \leq N_2 \leq N_1$

02/-a- Calculons $N_\infty(P_n)$, $N_2(P_n)$ et $N_1(P_n)$

On a : $P_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$

Donc, $\forall i \in \{0, \dots, n\} : |a_i| = 1$

D'où, $N_\infty(P_n) = 1$, $N_1(P_n) = n+1$

et $N_2(P_n) = \sqrt{n+1}$

On en déduit donc :

$$\frac{N_2}{N_\infty}(P_n) = \sqrt{n+1} \text{ et } \frac{N_1}{N_2}(P_n) = \sqrt{n+1}$$

b- On a déjà montré que $N_\infty \leq N_2$ donc, pour que N_∞ et N_2 soient équivalentes, il faut que $\frac{N_2}{N_\infty}$ soit borné.

Or, d'après ce qui précède $\frac{N_2}{N_\infty}(P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\frac{N_2}{N_\infty}$ n'est pas bornée

d'où les normes N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{K}[X]$

De même, les normes N_2 et N_2 sont équivalentes ssi $\frac{N_1}{N_2}$ est bornée

Or, on a $\frac{N_1}{N_2}(P_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$,

D'où, N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes sur $\mathbb{K}[X]$

Exercice 05 :

Supposons par l'absurd que f admet deux limites $\neq$ l_1 et l_2 qd x tend vers a.

On a : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0$ tq

$\|x - a\|_E \leq \eta_1 \Rightarrow \|f(x) - l_1\|_F \leq \varepsilon$

et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_2 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0$ tq

$\|x - a\|_E \leq \eta_2 \Rightarrow \|f(x) - l_2\|_F \leq \varepsilon$

Soit $\varepsilon = \frac{\|l_1 - l_2\|_F}{3} > 0$, notons

$\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et soit $x \in E$ tq

$\|x - a\|_E \leq \eta$

On a donc $\|l_1 - l_2\|_F = \|l_1 - f(x) + f(x) - l_2\|_F$

$\leq \|f(x) - l_1\|_F + \|f(x) - l_2\|_F$

$\leq 2\varepsilon$

$\leq \frac{2}{3} \|l_1 - l_2\|_F$

puisque $l_1 \neq l_2$ alors $\|l_1 - l_2\| \neq 0$

Donc on peut simplifier par $\|l_1 - l_2\|_F$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{2}{3}$ absurde

Donc f admet une limite unique au voisinage de a.

Exercice : DS 2017/2018

Notons $A(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

Pour $f \in A(\mathbb{R})$ tq $f(x) = ax + b$ on pose $N_1(f) = |a| + |b|$

et $N_\infty(f) = \sup(|a|, |b|)$

1 Montrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur $A(\mathbb{R})$

Pour N_1 :

(1.1) : $\forall f \in A(\mathbb{R}),\ N_1(f) \geq 0$

car $|a| \geq 0$ et $|b| \geq 0$

(1.2) : Si $f = 0$ alors, $a = b = 0$

D'où, $N_1(f) = 0$

(1.3) Si $N_1(f) = 0$, alors $|a| + |b| = 0$

Donc $a = b = 0 \Rightarrow f = 0$

(1.4) soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $f \in A(\mathbb{R})$,

on a $N_1(\lambda f) = |\lambda a| + |\lambda b|$

$= |\lambda| (|a| + |b|) = |\lambda| N_1(f)$

(1.5) soit $(f, g) \in (A(\mathbb{R}))^2$ $\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = a'x + b' \end{cases}$

on a :

$N_1(f+g) = |a + a'| + |b + b'|$

$\leq |a| + |a'| + |b| + |b'|$

$\leq N_1(f) + N_1(g)$

Finalement, N_1 est une norme sur $A(\mathbb{R})$

Pour N_∞ :

(1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) sont claires

(1.5) Mq $\sup(|a + a'|, |b + b'|)$

$\leq \sup(|a|, |b|) + \sup(|a'|, |b'|)$

On a $|a + a'| \leq |a| + |a'|$

$\leq \sup(|a|, |b|) + \sup(|a'|, |b'|)$

$\leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$

De m̂ $|b + b'| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$

Par passage au sup, on obtient.

$\sup(|a + a'|, |b + b'|) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$

$\Leftrightarrow N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$

Serie 02 :

Exercice 01 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}^2$

Pour $x = y$ on a : $f(x,x) = \frac{1}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}^*$

Donc, $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$

Par suite f n'est pas continue en $(0,0)$

Exercice 02 :

Montrons que $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$

soit $\varepsilon > 0$, $\exists ?\ \eta > 0 \,/\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\|(x,y)\|_\infty < \eta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \varepsilon$.

on a $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$

$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$

$\Rightarrow \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq |y|$

or, $|y| \leq \max(|x|, |y|) = \|(x,y)\|_\infty$

Donc, $\left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \leq \|(x,y)\|_\infty$

Donc, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$.

Par suite, g est continue en $(0,0)$

Exercice 03 :

1) Posons $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

+ Pour $y = x$ on a $f(x,x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^*$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 0$

+ Pour $y = 2x$ on a $f(x,2x) = \frac{-3}{5} \ \forall x \in \mathbb{R}^*$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x,2x) = \frac{-3}{5} \neq 0$

Par suite, f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

2) Dém pour $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x-y}{|x+y|}$

Si on prend $y = 2x$ on trouve.

$\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ y = 2x}} \frac{x-y}{|x+y|} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-x}{3|x|} = \pm \frac{1}{3}$

d'où la lim $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x-y}{|x+y|}$ n'existe pas.

Exercice 04 :

01- Dans le cour.

02- $N_1 \leq C N_2$

$g : (E, N_2) \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto g(x) = N_1(x)$

Soit $x_0 \in E$, soit $\varepsilon > 0$, cherchons $\eta > 0 / \forall x \in E$

$N_2(x - x_0) < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$.

on a $|g(x) - g(x_0)| = |N_1(x) - N_1(x_0)|$
$\leq N_1(x - x_0)$

$\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leq C N_2(x - x_0)$

il suffit donc de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{C}$

D'où g est continue en x_0 par suite g est continue sur E

03- Pour assurer la continuité de h, on doit avoir la condition suivante

$\exists C' > 0 \,/\, N_2 \leq C' N_1$

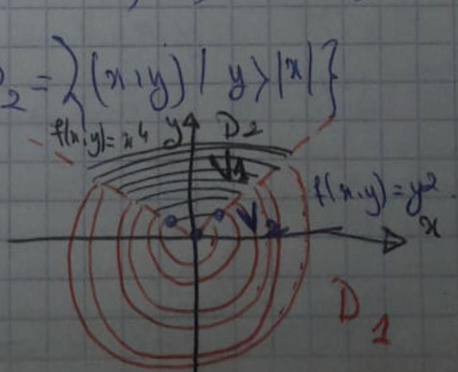
Par suite, N_1 et N_2 doivent être équivalent

Exercice 05 :

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & si\ \ y \leq |x| \\ x^4 & si\ \ y > |x| \end{cases}$$

01-
Posons $D_1 = \{(x,y) / y \leq |x|\}$

et $D_2 = \{(x,y) \,/\, y > |x|\}$



$D_f = \mathbb{R}^2$.

02) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé :

a- *Si $y_0 > |x_0|$:

Sur D_2, on a $f(x,y) = x^4$ qui est un polynôme continue sur $\mathbb{R}^2$ d'où f est continue sur D_2 qui est un ouvert.

par suite, f est continue en (x_0, y_0)

* Si $y_0 < |x_0|$

Posons (Δ) l'ensemble des (x,y) tq

$(\Delta) = \{(x,y) / y < |x|\}$

Sur (Δ) $f(x,y) = y^2$ qui est un polynôme continue sur $\mathbb{R}^2$ d'où f est continue sur (Δ) qui est un ouvert.

par suite f est continue en (x_0, y_0)

b- $y_0 = |x_0|$

on a $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in V_1}} f(x,y) = x_0^4$

et $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in V_2}} f(x,y) = y_0^2$

Par suite f est continue en $(x_0,y_0) \iff x_0^4 = y_0^2$

c- f est continue en $(x_0, y_0) \iff x_0^4 = x_0^2$

$\iff x_0^4 - x_0^2 = 0$

$\iff x_0^2(x_0^2 - 1) = 0$

$\iff x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$

Exercice 06 :

01 $f(x,y) = x|y|$

on a $D_f = \mathbb{R}^2$

Posons : $u(x,y) = x$ et $v(x,y) = |y|$

u et v sont deux fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}^2$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

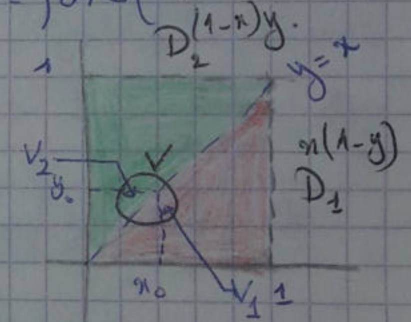
02 - $f :]0,1[^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } y \le x \\ (1-x)y & \text{si } y > x \end{cases}$$

Posons $D_1 = \{(x,y) \in]0,1[^2 : y \le x\}$

et $D_2 = \{(x,y) \in]0,1[^2 : y > x\}$

On a donc $D_f =]0,1[^2$



* Etudions la continuité de f sur D_f :

→ Sur D_2 : on a : $f(x,y) = (1-x)y$

C'est un polynôme continue sur $\mathbb{R}^2$.

or D_2 est un ouvert, donc f est continue sur D_2.

→ Sur $D_1' = \{(x,y) \in]0,1[^2 : y < x\}$

on a : $f(x,y) = x(1-y)$ qui est un polynôme continue sur $\mathbb{R}^2$,

donc f est continue sur D_1' qui est un ouvert

→ Sur $\{(x,y) \in]0,1[^2 : y = x\} =]O, A[$

Soit $(x_0, y_0) \in]O, A[$

On a donc, $x_0 = y_0$ et $f(x_0, y_0) = x_0(1-y_0)$
$= x_0(1-x_0)$

Mq: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0(1-x_0)$

soit V un voisinage de (x_0, y_0)

Posons $V_1 = V \cap D_1$ et $V_2 = V \cap D_2$

Calculons $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in V_1}} f(x,y)$

On a: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in V_1}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x(1-y)$

$= x_0(1-y_0)$

$= x_0(1-x_0)$ ①

D'une autre part on a:

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in V_2}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (1-x)y$

$= (1-x_0)y_0$

$= (1-x_0)x_0$ ②

D'après ① et ② la $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0(1-x_0)$
$= f(x_0, y_0)$

D'où f est continue en (x_0, y_0)

par suite, f est continue sur $]0,1[$

Finalement, f est continue sur D_f

3 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3; (x,y) \mapsto (x\sin y, y+x, y^5)$

Posons: $\begin{cases} f_1(x,y) = x\sin y \\ f_2(x,y) = y+x \\ f_3(x,y) = y^5 \end{cases}$

On a $D_f = \mathbb{R}^2$.

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont produits de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}^2$

donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4 $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto \left(yz, x\sqrt{z}, \frac{y}{x}\right)$

Posons $\begin{cases} f_1(x,y,z) = yz \\ f_2(x,y,z) = x\sqrt{z} \\ f_3(x,y,z) = \frac{y}{x} \end{cases}$

On a $D_{f_1} = \mathbb{R}^3$, $D_{f_2} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$

et $D_{f_3} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$.

Donc $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont produits de fonctions usuelles continues sur D_f. Donc f est continue sur D_f

5 - $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

On a: $D_f = \mathbb{R}^2$

* Etudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

→ Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

On a $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

La fonction f est le rapport de deux fonction usuelles continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}: \sqrt{x^2+y^2} \neq 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

→ en $(0,0)$:

Calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

On a: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$x^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{|x|}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2}{|x|}$

$\Rightarrow |f(x,y)| \leq |x|$

comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$

alors d'après le théorème d'encadrement des limites, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

D'où f est continue en $(0,0)$

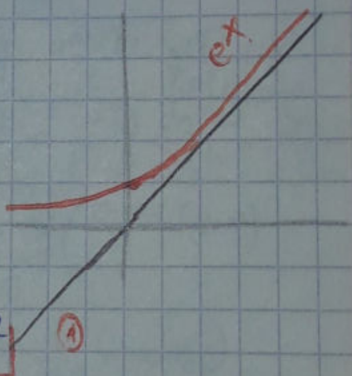
Finalement, f est continue sur D_f.

Exercice 07:

$$f(x,y) = \frac{2xy}{1+e^{(x^2+y^2)}}$$

On sait que:

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq x$



Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$e^{x^2+y^2} \geq x^2+y^2$

$\Rightarrow 1+e^{x^2+y^2} \geq \underline{1+x^2+y^2}$ ①

d'une autre part $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a:

$\pm 2xy \leq x^2+y^2$

$\Leftrightarrow |2xy| \leq x^2+y^2$

$\Rightarrow |2xy| \leq \underline{1+x^2+y^2}$ ②

D'après ① et ②, on trouve

$|2xy| \leq 1+e^{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \left|\frac{2xy}{1+e^{x^2+y^2}}\right| \leq 1$

d'où f est bornée sur $\mathbb{R}^2$

ENSA-ALHOCEIMA
ANALYSE 3

CP II
SEMESTRE 1

Exercice 1 :

Calculer les dérivées partielles et la différentielle des fonctions suivantes :

1- $f(x,y) = 4x^4\sin(x+y) + ye^x$
2- $g(x,y,z) = z(\log y + \log x)$
3- $h(x,y,z) = \frac{y^5 z}{\sqrt{x^2+4}}$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y) = \left(y\sqrt{x}, \frac{\cos x \sin y}{(xy)^2+1}\right)$

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Etudier la différentiabilité de f sur D_f.
3- Déterminer la matrice jacobienne $J_f(x,y)$.
4- En déduire la différtielle de .

Exercice 3 :

Soit la fonction $f:]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & si \quad y \le x, \\ (1-x)y & si \quad y > x \end{cases}$$

1- Déterminer le domaine de définition D_f.
2- Etudier la continuité de f sur D_f.
3- Soit $0 < x_0 < 1$, étudier la dérivabilité des deux fonctions $f(.,x_0)$ et $f(x_0,.)$en x_0,
4- En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,x_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,x_0)$.
5- Etudier la dérivabilité de f par rapport à x et à y en (x,y) tel que $x \neq y$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Exercice 4 :

Etudier la continuité et l'existence de dérivées partielles pour les fonctions suivantes :

1- $f(x,y) = |x| + |y|$
2- $g(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Exercice 5 :

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

1- Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
   a- $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_1(x,y) = f(2x-y, 4x+y^2)$
   b- $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_2(x,y) = f(x^3+2, e^{xy})$
   c- $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f_2(x) = f(x, x^4)$

2- Déterminer la matrice jacobienne de la fonction $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$g(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x)).$$

Exercice 6 :

On considère l'application $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + z^2)exp(x(y^2+z^2 + 1)).$$

1- Rappeler le domaine de définition D de f , puis montrer que f est différentiable sur D.

2- Calculer le gradient $\nabla f(x, y, z)$ de f

3- Montrer que l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.

4- Expliciter la différentielle $df(x, y, z)$ de f, puis établir la relation entre $df(x, y, z)$ et $\nabla f(x, y, z)$.

5- On appelle les points critiques de f les solutions de l'équations :

$$\nabla f(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

a- Montrer que f n'admet qu'un seul point critique $A(x_A, y_A, z_A)$ où x_A ,y_A et z_A sont à déterminer.

b- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_A, y_A, z_A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_A, y_A, z_A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x_A, y_A, z_A)$, , $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x_A, y_A, z_A)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_A, y_A, z_A)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x_A, y_A, z_A)$.

c- Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $f(x, y, z) \geq -\frac{1}{e}$ et que pour tout $x < 0$ on a :

$$xe^x \leq f(x, y, z) \leq z^2 exp(x(y^2 + z^2 + 1)).$$

6- Calculer $f(x_A, y_A, z_A)$, $\lim_{(x,y,z)\to-\infty} f(x, y, z)$ et $\lim_{(x,y,z)\to+\infty} f(x, y, z)$ où $\pm\infty = (\pm\infty, \pm\infty, \pm\infty)$

Série 03 :

Exercice 01 :

1- $f(x,y) = 4x^4\sin(x+y) + ye^x$

On a $D_f = \mathbb{R}^2$.

La fct f est somme et produit de fonctions usuelles différentiables sur $\mathbb{R}^2$

Donc, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

* Les dérivés partielle de f :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 16x^3\sin(x+y) + 4x^4\cos(x+y) + ye^x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^4\cos(x+y) + e^x \end{cases}$$

On en déduit la différentielle de f

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy.$$

On a donc :

$df(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire

$$d(f(x,y))(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, k$$

$$= \left[16x^3\sin(x+y) + 4x^4\cos(x+y) + ye^x\right]\cdot h + \left[4x^4\cos(x+y) + e^x\right]\cdot k$$

2- $g(x,y,z) = z(\log y + \log x)$

On a : $D_g = (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$.

* les dérivés partielles de g :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{z}{x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{z}{y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \log x + \log y \end{cases}$$

On en déduit donc la différentielle de g.

$$dg(x,y,z)(h,k,l) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)\cdot h + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)\cdot k + \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\cdot l$$

$$\Leftrightarrow dg(x,y,z)(h,k,l) = \frac{z}{x}h + \frac{z}{y}k + [\log x + \log y]\cdot l$$

3- $h(x,y,z) = \dfrac{y^5 z}{\sqrt{x^2+4}}$

on a : $D_h = \mathbb{R}^3$

h est le rapport de deux fonctions usuelles différentiables sur $\mathbb{R}^3$.

et $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+4} \neq 0$

Donc, h est différentiable sur $\mathbb{R}^3$.

* Les dérivés partielles de h :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = y^5 z \times \left(-\tfrac{1}{2}\right)(x^2+4)^{\frac{1}{2}-1} \times 2x$$
$$= -xy^5 z\,(x^2+4)^{-3/2}$$
$$= \frac{-xy^5 z}{\sqrt{x^2+4}^{\,3}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = \frac{5y^4 z}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = \frac{y^5}{\sqrt{x^2+4}}$$

d'où la différentielle de h est

$$dh(x,y,z)(h,k,l) = \frac{y^4}{\sqrt{x^2+4}}\left[\frac{-xyz}{(x^2+4)}h + 5z\,k + y\,l\right].$$

Exercice 02 :

$$f(x,y) = \left(y\sqrt{x},\ \frac{\cos x \sin y}{(xy)^2+1}\right)$$

01- Domaine de définition

$$D_f = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = [0,+\infty[\times \mathbb{R}$$

02- Etudions la différentiabilité de f sur D_f

Posons : $\begin{cases} f_1(x,y) = y\sqrt{x} \\ f_2(x,y) = \dfrac{\cos x \sin y}{(xy)^2+1} \end{cases}$

a- La différentiabilité de f_1 sur D_f :

(i) posons $u(x,y) = y$ et $v(x,y) = \sqrt{x}$

+ u est un polynôme différentiable sur $\mathbb{R}^2$

Donc, u est différentiable sur D_f.

+ v est une fonction usuelle différentiable sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$

d'où f_1 est diff sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

(ii) Diff de f_1 en $(0,y) / y \neq 0$

Soit $y \in \mathbb{R}^*$

Calculons $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x,y) - f_1(0,y)}{x}$

on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x,y) - f_1(0,y)}{x}$

$$= \lim_{0^+} \frac{y\sqrt{x}}{x} = \lim_{0^+} \frac{y}{\sqrt{x}} = \pm\infty$$

Donc, f_1 n'est pas dérivable par rapport à x en $(0,y)$.

D'où f_1 n'est pas différentiable en $(0,y)$ $\forall y \in \mathbb{R}^*$

Par suite, f_1 n'est pas différentiable sur $\{0\} \times \mathbb{R}^*$

(iii) - Diff en f_1 en $(0,0)$

on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x,0) - f_1(0,0)}{x} = \lim_{0^+} 0 = 0$

Donc, f_1 est dérivable par rapport à x en $(0,0)$ et la dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

D'une autre part on a :

$$\lim_{y\to 0} \frac{f_1(0,y) - f_1(0,0)}{y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Donc, f_1 est dérivable par rapport à y en $(0,0)$.

Calculons $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k) - f_1(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k\sqrt{h}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

on sait que : $|k| \leq \sqrt{h^2+k^2}$

Donc, $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\left| \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \sqrt{h}$$

Comme $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h} = 0$, alors

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

D'où f est diff en $(0,0)$

Finalement :

f_1 est diff sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \cup \{(0,0)\}$

b- Différentiabilité de f_2 sur D_f :

f_2 est le rapport de deux fcts usuelles diff sur $\mathbb{R}^2$.

et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(xy)^2+1 \neq 0$

Donc, f_2 est diff sur $\mathbb{R}^2$, par suite, sur D_f.

$\Rightarrow$ D'où, f est diff sur $(\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$.

03/- La matrice jacobienne de f :

Calculons les dérivées partielles de f_1 et f_2 :

on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{2\sqrt{x}} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x} \end{cases}$$

et $$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{-\sin x \sin y\,((xy)^2+1) - \cos x \sin y\, 2xy^2}{((xy)^2+1)^2}$$

$$= \frac{-\sin y[\sin x[(xy)^2+1] + 2xy^2\cos x]}{((xy)^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos x \cos y\,((xy)^2+1) - \cos x \sin y\, 2x^2y}{((xy)^2+1)^2}$$

$$= \frac{\cos x\,[\cos y\,((xy)^2+1) - 2x^2y\sin y]}{((xy)^2+1)^2}$$

on en déduit donc :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

04/ La différentielle de f :

Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}) \cup \{(0,0)\}$.

et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

on a : $$J_f(x,y) \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,h + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,k \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,h + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,k \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$df(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{linéaire}$$
$$(h,k) \longmapsto df(x,y)(h,k)$$

$$df(x,y)(h,k) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)\,h + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\,k,\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\,h + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\,k \right)$$

Exercice 03 :

03/ Soit $x_0 < 1$. Étudions la dérivabilité de $f(\cdot, x_0)$ en x_0.

Posons : $g = f(\cdot, x_0)$.

Donc, $g :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto g(x) = f(x, x_0)$$

On a $$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,x_0) - f(x_0,x_0)}{x-x_0}$$

Or on a : $$g(x) = \begin{cases} x(1-x_0) & \text{si } x_0 \leq x \\ (1-x)x_0 & \text{si } x_0 > x \end{cases}$$

Par suite :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{x(1-x_0)-x_0(1-x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \frac{(1-x_0)(x-x_0)}{x-x_0}$$

$$= 1-x_0 .$$

Donc, g est dérivable à droite en x_0, et $g'_d(x_0) = 1-x_0$

D'une autre part, on a :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{(1-x)x_0-(1-x_0)x_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{x_0(1-x-1+x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{x_0(x_0-x)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{-x_0(x-x_0)}{x-x_0} = -x_0$$

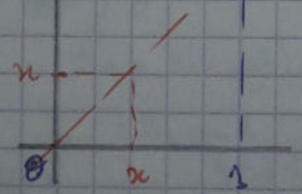
D'où g est dérivable à gauche en x_0, et $g'_g(x_0) = -x_0$.

Comme $g'_d(x_0) \neq g'_g(x_0)$,

Alors g n'est pas dérivable en x_0

Donc, $f(\cdot, x_0)$ n'est pas dérivable en x_0.

Par suite, f n'est pas dérivable par rapport à x en (x_0, x_0)



Par analogie, la fonction $f(x_0, \cdot)$ n'est pas dérivable en x_0.

D'où, f n'est pas dérivable % à y en (x_0, x_0)

Finalement, f n'est pas différentiable sur $]O, A[$.

04/ D'après ce qui précède, f n'est pas dérivable % à x et à y en (x_0, x_0).

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, x_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, x_0)$ n'existent pas.

05/ * Etudions la dérivabilité de f % à x en $(x,y) \mid x \neq y$

→ soit $(x_0, y_0) \in D_2 = \{(x,y) \in]0,1[^2, y > x\}$

Calculons : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

D_2 est un ouvert, donc $\exists$ un voisinage V de (x_0,y_0) tq $V \subset D_2$

par suite : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(1-x)y_0-(1-x_0)y_0}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{y_0(x_0-x)}{x-x_0} = -y_0$$

Donc f est dérivable % à x en (x_0, y_0)

et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -y_0}$

D'où f est dérivable % à x sur D_2.

→ Soit $(x_0,y_0) \in D'_1 = \{(x,y) \in]0,1[^2, y < x\}$

D'_1 est un ouvert, donc $\exists$ un voisinage V de (x_0,y_0) tq $V \subset D'_1$

par suite : $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x(1-y_0)-x_0(1-y_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(1-y_0)(x-x_0)}{x-x_0} = (1-y_0)$$

donc, f est dérivable % à x en (x_0, y_0)

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 1-y_0$.

D'où f est dérivable % à x sur D'_1.

on en déduit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} -y & \text{si } y > x \\ 1-y & \text{si } y < x. \end{cases}$$

* Etudions la dérivabilité de f % à y en (x_1, y_1) / $x \neq y$

→ Sur D_2, $f(x,y) = (1-x)y$ qui est un polynôme différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Or D_2 est un ouvert, donc f est diff sur D_2.

Par suite, f est dérivable % à x et % à y sur D_2.

Et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1-x$.

De même, f est dérivable % à y sur D'_1

Et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x$.

D'où $$\frac{\partial f}{\partial \cdot}(x,y) = \begin{cases} 1-x & , y > x \; D_2 \\ -x & y < x \; D'_1 \end{cases}$$

Exo6 :

$$f(x,y,z) = (x+z^2)\, e^{x(y^2+z^2+1)}$$

05/ a. Les points critiques de f sont les solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 1+(x+z^2)(y^2+z^2+1)=0 \\ 2yx(x+z^2)=0 \\ 2z+(x+z^2)2zx=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+(x+z^2)(y^2+z^2+1)=0 \\ y=0 \text{ ou } x=0 \text{ ou } x+z^2=0 \\ z(1+x(x+z^2))=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+(x+z^2)(z^2+1)=0 \\ y=0 \\ 2z+(x+z^2)2zx=0 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} 1+z^2(y^2+z^2+1)=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$

ou $\begin{cases} 1=0 \\ x+z^2=0 \\ 2z=0 \end{cases}$ Impossible.

Exercice 06

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+(x+z^2)(z^2+1)=0 \\ y=0 \\ z=0 \text{ ou } 1+x(x+z^2)=0 \end{cases}$$

ou $\begin{cases} 1=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$ Impossible.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 1+(x+z^2)(z^2+1)=0 \\ y=0 \\ 1+x(x+z^2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+z^2=\frac{-1}{z^2+1} \\ y=0 \\ 1=\frac{x}{z^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} z^2+1+z^2=\frac{-1}{z^2+1} \\ y=0 \\ x=z^2-1 \end{cases}$$

or, $\forall z\in\mathbb{R}$: $2z^2+1>0$ et $\frac{-1}{z^2+1}<0$

D'où le 2ème système est impossible

finalement f admet un unique point critique $A(-1,0,0)$

b- Calculons $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0,0)$

on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\left(1+(x+z^2)(y^2+z^2+1)\right)e^{x}$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)=e^{x(y^2+z^2+1)}\left[(y^2+z^2+1)+\left[1+(x+z^2)(y^2+z^2+1)\right](y^2+z^2+1)\right]$

$=e^{x(y^2+z^2+1)}(y^2+z^2+1)\left[1+1+(x+z^2)(y^2+z^2+1)\right]$

D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0,0)=e^{-1}\left[2+(-1)\times 1\right]$

$=e^{-1}=\frac{1}{e}$

c- Mq $\forall x\geq 0$ $(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}\geq\frac{-1}{e}$ $f(-1,0,0)$

on sait que $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$:

$e^{x(y^2+z^2+1)}>0$ de plus on a

$x\geq 0\Rightarrow x+z^2\geq 0$ d'où :

$\forall x\geq 0$ $f(x,y,z)\geq 0>\frac{-1}{e}$.

Mq $\forall x<0$: $xe^x\leq f(x,y,z)\leq z^2e^{x(y^2+z^2+1)}$

D'une part, on a $x<0\Rightarrow x+z^2<z^2$

et puisque $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $e^{x(y^2+z^2+1)}>0$

alors $(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}\leq z^2e^{x(y^2+z^2+1)}$ (1)

D'autre part : on a ;

$\forall(y,z)\in\mathbb{R}^2$; $y^2+z^2+1\geq 1$

Donc, pour $x<0$, on trouve :

$x(y^2+z^2+1)\leq x$

Or la fonction exponentielle est ↗

d'où : $e^{x(y^2+z^2+1)} \leq e^{x}$

par suite $xe^x \leq xe^{x(y^2+z^2+1)}$ (i)

De plus, on a : $x \leq x+z^2$

$\Rightarrow xe^{x(y^2+z^2+1)} \leq (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$ (ii)

D'après (i) et (ii) on trouve

$xe^x \leq (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$ (2)

D'après (1) et (2) on a $\forall x<0$:

$xe^x \leq f(x,y,z) \leq z^2 \exp(x(y^2+z^2+1))$.

04/ Calculons $\lim\limits_{(x,y,z)\to+\infty} f(x,y,z)$.

on a $\lim\limits_{+\infty} (x+z^2) = +\infty$,

et $\lim\limits_{+\infty} e^{x(y^2+z^2+1)} = +\infty$

Donc, $\lim\limits_{+\infty} f(x,y,z) = +\infty$.

Calculons $\lim\limits_{(x,y,z)\to-\infty} f(x,y,z)$

D'après l'encadrement trouvé dans la qst c/ il suffit de mq

$$\lim_{(x,y,z)\to-\infty} z^2 e^{x(y^2+z^2+1)} = 0$$

on a $\lim\limits_{(x,y,z)\to-\infty} z^2 e^{x(y^2+z^2+1)} =$

$$= \lim_{-\infty} x(y^2+z^2+1)e^{x(y^2+z^2+1)} \times \frac{z^2}{x(y^2+z^2+1)}$$

or $\left|\frac{z^2}{x(y^2+z^2+1)}\right| \leq \frac{1}{|x|}$

et comme $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{|x|} = 0$

alors $\lim\limits_{-\infty} \frac{z^2}{x(y^2+z^2+1)} = 0$

De plus $\lim\limits_{-\infty} x(y^2+z^2+1)e^{x(y^2+z^2+1)} = 0$

par suite $\lim\limits_{-\infty} z^2 e^{x(y^2+z^2+1)}$

Finalement, d'après le th d'encadrement des limites, on a puisque

$$\lim_{-\infty} xe^x = \lim_{-\infty} z^2 e^{x(y^2+z^2+1)} = 0$$

Alors

$$\lim_{-\infty} f(x,y,z) = 0$$

ENSA d'Al-HOCEIMA
ANALYSE 3

CP-II
Semestre 1

Exercice 1 :

Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(x,y) = (x+y, xy)$$

1- Donner le domaine de définition D de f et étudier sa différentiabilité sur D.
2- Déterminer la matrice jacobienne $J_f(x,y)$ de f et son jacobien $j_f(x,y)$.
3- Montrer que la restriction de f à l'ouvert
$$U = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2/x < |y|\}$$
est un C^1-difféomorphisme sur son image.

Exercice 2 :

Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par:

$$f(x,y,z) = (e^{2x} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$$

Montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert V .

Exercice 3 :

Montrer qu'il existe une fonction

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ , } x \mapsto y = f(x)$$

de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$
et définie implicitement par l'équation:

$$Arctan(xy) + 1 = e^{x+y}.$$

Exercice 4 :

1- Montrer qu'au voisinage de (1,2), l'ensemble:
$$\Gamma_1 = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : xlny + ylnx = ln2\}$$
est un arc paramétré.

2- Montrer qu'au voisinage de (1,2,0), l'ensemble:
$$\Gamma_2 = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 : x^2 + \sin(xyz) + e^z = 2\}$$
est un graphe fonctionnel.

3- Montrer qu'au voisinage de (0,0) l'équation:

$$x^3 + xy^2 - 12x + 6y = 0$$

définit implicitement y comme une fonction de x de classe C^1.

Exercice 5 :

Posons:

$$k(x,y) = \left(x^3 + xy^2 - 12x + 6y, \quad \frac{3}{2}x^2 + y^2\right)$$

1. Déterminer la matrice jacobienne $J_k(x,y)$ de k et son jacobien $j_k(x,y)$.
2. Montrer que k est un C^1-difféomorphisme local au voisinage de (1,1).
3. La fonction k est- elle un C^1-difféomorphisme sur l'ensemble $U = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 : x = y\}$? justifier.

Exercice 6 :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f: U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 telle que:

$$\forall a \epsilon U : j_f(a) \neq 0.$$

1- Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local de U dans $\mathbb{R}^n$.

2- Montrer que $f(U)$ est un ouvert.

3- Si de plus f est injective, montrer que f est un C^1-difféomorphisme global.

4- **Application:**

Considérons la fonction: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

a- Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.

b- Montrer que f est un C^1-difféomorphisme local sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

c- Déterminer un ouvert U, pour que f soit un C^1-difféomorphisme global sur U.

Serie 04

Exo3 :

a- Posons $g(x,y) = \text{Arctan}(x+y) + 1 - e^{(x-y)}$

g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est la somme et la composée de deux fcts usuelles de C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (a)

b- $g(0,0) = 0$ (b)

c-

On a $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{x}{1+(x+y)^2} - e^{(x-y)}$

$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -1 \neq 0$ (c)

d'après (a), (b) et (c) le thm des fcts implicites $\exists I$ voisinage de 0.

et $\exists J$ voisinage de 0.

et $\exists f : I \to J$ de C^∞ tq

$f(0) = 0$ et $\begin{cases} g(x,y)=0 \\ x\in I, y\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x\in I, y\in J \end{cases}$

Exo4

(1) Posons :

$f(x,y) = x\ln(y) + y\ln(x) - \ln(2)$

on $D_f = (\mathbb{R}^{+*})^2$

(a) f est de C^1 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ car f est la somme et le produit de fcts usuelles de C^1 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$

(b). $f(1,2) = 0$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln(y) + \frac{y}{x}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \ln(2) + 2 \neq 0$

D'après le th de fcts implicites (T.F.I)

$\exists I$ voisinage de 1

$\exists J$ voisinage de 2

$\exists \varphi : J \to I$ de C^1

tel que $\varphi(2) = 1$ et

$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x\in I, y\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(y) \\ x\in I, y\in J \end{cases}$

D'où T_1 est un arc paramétrique.

(2) Posons :

$f(x,y,z) = x^2 + \sin(x \cdot y \cdot z) + e^z - 2$

on a

*) $f(1,2,0) = 1 + 0 + 1 - 2 = 0$

**) f est de C^1 sur $\mathbb{R}^3$ car c'est la somme de fcts usuelles de C^1 sur $\mathbb{R}^3$

***) on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0) = 2 \neq 0$

Donc d'après le th des fcts implicites

$\exists$ un voisinage I de 1, et $\exists$ un voisinage W de $(2,0)$.

$\exists$ une fct $\varphi : W \to I$ de C^1

tq $\varphi(2,0) = 1$ et

$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ x\in I \text{ et } (y,z)\in W^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(y,z) \\ x\in I, (y,z)\in W^2 \end{cases}$

Par suite : T_2 est un graphe fonctionnel au voisinage de $(1,2,0)$

(3) Posons : $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 12x + 6y$

on a (*) $f(0,0) = 0$

(**) f est de C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car f est un polynôme

(***) on a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + 6$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 6 \neq 0$

Donc, d'après le th des fcts implicites

$\exists$ un voisinage I de 0.

$\exists$ un voisinage J de 0.

et $\exists$ une fct $\varphi : I \to J$ de C^1

tq $\varphi(0) = 0$ et

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ x \in I \text{ et } y \in J \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y \in \varphi(x) \\ x \in I \text{ et } y \in J \end{cases}$$

Exo5 :

(1) Determinons la matrice Jacobienne

$J_k(x,y)$ de K :

Posons
$$\begin{cases} k_1(x,y) = x^3 + xy^2 - 12x + 6y \\ k_2(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 \end{cases}$$

on a donne

$$\begin{cases} \frac{\partial K_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^2 - 12 \\ \frac{\partial K_2}{\partial y}(x,y) = 2xy + 6 \end{cases}$$

et $$\begin{cases} \frac{\partial K_2}{\partial x}(x,y) = 3x \\ \frac{\partial K_2}{\partial y}(x,y) = 2y \end{cases}$$

Par suite, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$J_k(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+y^2-12 & 2xy+6 \\ 3x & 6y \end{pmatrix}$$

on en déduit donc la jacobienne de K :

$$j_k(x,y) = 2y(3x^2+y^2-12) - 3x(2xy+6)$$
$$= 2y^3 - 24y - 18x$$
$$= 2\left[y^3 - 12y - 9x\right]$$

(2) - on a :

(*) K est de C^1 sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes sont des polynomes de C^1 sur $\mathbb{R}^2$

(**) $j_k(1,1) = -40 \neq 0$

Donc d'après ~~th~~ th d'inversion locale.

il existe un voisinage ouvert V de $(1,1)$ tq

$K : V \longrightarrow K(V)$

est un C^1 - difféomorphisme

(3) Sur $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

on a $j_k(x,x) = (2x^2 - 6x, \frac{5}{2}x^2)$
$= \left(2x(x^2-3), \frac{5}{2}x^2\right)$

Donc $K(\sqrt{3},\sqrt{3}) = (0, \frac{15}{2})$
$= K(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

Par suite, K n'est pas injective sur $\mathcal{U}$.

D'où K n'est pas un C^1 difféomorphisme sur $\mathcal{U}$.

méthode 2 :

sur $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$ on a :

$$J_k(x,x) = 2(x^3 - 21x)$$
$$= 2x(x^2 - 21)$$

comme $J_k(0,0) = J_k(\sqrt{21}, \sqrt{21})$
$= J_k(-\sqrt{21}, -\sqrt{21}) = 0$

alors K n'est pas un C^1-diff sur $\mathcal{U}$.

Exo6 :

(1) soit $x_0 \in \mathcal{U}$

on a :

(*) f est de C^1 sur $\mathcal{U}$

D'après l'énoncé.

(**) $j_f(x_0) \neq 0$ car $\forall a \in \mathcal{U}$; $J_f(a) \neq 0$

Donc d'après le th d'inversion local, il existe un voisinage ouvert de x_0 tq

$f : V \longrightarrow f(V)$ est un C^1 - difféomorp

D'où f est un C^1-diff local du $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^n$

(2)

② Mq $f(u)$ est un ouvert :

rappel : θ est un ouvert $\iff (\forall x \in \theta)$ ($\exists$ voisinage V de x), $V \subset \theta$

soit $y \in f(u)$, $\exists x \in u / y = f(x)$

D'après ce qui précède, $\exists$ un voisinage ouvert V de x, $\exists$ un voisinage ouvert W de $f(x)$

$f : V \to W$. est un C^1 diff.

Mq $W \subset f(u)$ on a $V \subset u \Rightarrow f(V) \subset f(u)$

$\Rightarrow W \subset f(u)$

Finalement, $f(u)$ est un ouvert

③
$$\begin{cases} f : A \to C \text{ surj} \\ f : B \to C \text{ surj} \\ f(A\cup B) \to C \text{ surj} \end{cases}$$

$f : A \to C$ inj ??

$f : B \to C$ inj

$f : (A \cup B) \to C$ inj

Alors f n'est pas injective (c-à-d pour toujours) sur $A \cup B$

• Mq f est un C^1-difféomorphisme globale

D'après ce qui précède :

(*) $\begin{cases} f \ (\forall a \in u)(\exists V \text{ voisinage ouvert de } a) \\ f : V \to f(V) \text{ est un surjectif} \end{cases}$

et de plus f est injective sur u

Alors $f : u \to f(u)$ est bijective

sa réciproque $f^{-1} : f(u) \to V$ est aussi C^1 (d'après (*))

Finalement f est un C^1-difféomorphisme globale

④ Application :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(r,\theta) \to (r\cos(\theta),\ r\sin\theta)$$

a- f est de C^1 sur $\mathbb{R}^2$, car ses composantes sont des produit de fonctions usuelles de C^1 sur $\mathbb{R}^2$; sa matrice Jacobienne est $J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$

b- on a $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2$

$j_f(r,\theta) = r$ Donc $\forall (r,\theta) \in \,]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

$j_f(r,\theta) \neq 0$

D'après (1), f est un C^1-diff. globale

il faut que f soit injective sur u.

* inversion locale

① - f de classe C^1

② - $J_f(a) \neq 0$

C^1-difféomorphisme

sur un segment I locale

globale = sur D_f.

ENSA d'Al-Hoceima CP-II
TD Analyse 3 Semestre 1,

Exercice 1:

Soit $f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$

1- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

2- Montrer que f admet un unique point critique (0,0).

3- Calculer $r = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y)$.

4- En déduire Δ_0

5- Posons

$D_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ et $D_2 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$.

Montrer que :

$\forall (x,y) \in D_1 : f(x,y) \geq f(0,0)$ et $\forall (x,y) \in D_2 : f(x,y) \leq f(0,0)$

6- Que peut-on dire du point critique (0,0) ?

Exercice 2:

Soit $g(x,y) = (x-y)^2 + x^4 + y^4$

1- Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) \geq 0$.

2- Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$.

Puis déterminer les points critiques de g.

3- Montrer que g admet un minimum global.

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$, $a = (x_0, y_0, z_0) \in U$ tels que :

$f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Soit V un voisinage de (x_0, y_0, z_0), W un voisinage de (x_0, y_0) et φ une fonction de classe C^1 de W dans $\mathbb{R}$ tels que :

$z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ et

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ (x,y,z) \in V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \varphi(x,y) \\ (x,y,z) \in V \end{cases}$$

Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur V (V = W × I)

et $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

Série: N5 **Formules de Taylor et Extremums** 2019/2020

$$G(x,y) = g(x,y,\varphi(x,y))$$

Montrer que si (x_0, y_0) est un extrémum local de G alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(a).\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a).\dfrac{\partial g}{\partial z}(a) \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(a).\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a).\dfrac{\partial g}{\partial z}(a) \end{cases}$$

Application :

Soit $g(x,y,z) = xlnx + ylny + zlnz$

Et $f(x,y,z) = x + y + z - 3\alpha$ où $\alpha > 0$.

1- Montrer que si (x,y,z) est un extrémum de g avec : $x + y + z = 3\alpha$ alors $x = y = z = \alpha$.

2- Posons : $x = \alpha + u$, $y = \alpha + v$ et $z = \alpha + w$

a- Donner la formule de Taylor Young à l'ordre 2 de $ln(\alpha + u)$.

b- En déduire la formule de $g(x,y,z)$

c- Que peut-on dire du point (α,α,α) ?

Serie 05

Exo1 :

$f(x,y) = (x-y)^2 + x^3 + y^3$

(1) $\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y) = \frac{\partial}{\partial(x,y)}((x-y)^2 + x^3 + y^3)$

$= 2(x-y) + 3x^2 + 3y^2$

(2) mq f admet unique pt critique

c-à-d cherchons les solution du système : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$

ie : $\begin{cases} 2x - 2y + 3x^2 = 0 \\ 2y - 2x + 3y^2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 2(x-y) \\ 3y^2 = 2(x-y) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -y^2 \\ 3x^2 = 2(y-x) \end{cases}$

$\Rightarrow x = y = 0$

Donc f admet unique pt critique $(0,0)$

(3) calculons $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

on a :

$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 + 6x \\ s = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial xy} = -2 \\ t = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 + 6y \end{cases}$

(4) on a : $\begin{cases} r_0 = 2 \\ s_0 = -2 \\ t_0 = 2 \end{cases}$ donc $s_0 = s_0^2 + r_0 t_0$

$\Delta_0 = s_0^2 - r_0 t_0$

(5) posons $D_1 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$

$D_2 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0\}$

Mq $\forall (x,y) \in D$, $f(x,y) \geq f(0,0)$

* Sur D_1, on a $x = y$ tq $x \geq 0$:

ie : $f(x,y) = 2x^3 \geq 0 = f(0,0)$

* sur D_2 : on a $x = y$ tq $x \leq 0$

$f(x,x) = 2x^3 \leq 0 = f(0,0)$

(6) puisque $f(0,0)$ n'est ni valeur minimale ni maximal de f alors $(0,0)$ est un pt selle

Exo2 : (1) Mq $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) \geq 0$

on a $g(x,y) = (x-y)^2 + x^4 + y^4$

comme $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$(x-y)^2 \geq 0$, $x^4 \geq 0$, $y^4 > 0$

Alors $g(x,y) \geq 0$

(2) calculons $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$

$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2(x-y) + 4x^3$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 4y^3$

Par suite les points critique de g sont les solutions du systeme :

$(*) \begin{cases} 2(x-y) + 4x^3 = 0 \\ -2(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases}$

On a $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ -2(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \text{ ou } x^2 - xy + y^2 = 0 \\ -2(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases}$

pour l'éq (1) on a $\Delta = -3y^2$

Donc si $y = 0$ alors $\Delta = 0$ et par suite $x = 0$. D'où $(0,0)$ solution de $(*)$.

Si $y \neq 0$ alors $\Delta < 0$ et par suite (1) n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$

on en déduit donc

* $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -2(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -4x - 4x^3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 4x(1 + x^2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ Donc g admet un unique point critique $(0,0)$

(3) D'après (1) on a :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geq g(0,0)$

Donc $g(0,0)$ est une valeur minimale de g sur $\mathbb{R}^2$

Par suite, g admet un ~~unique~~ minimum globale en $(0,0)$

Exercice 03 :

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \end{cases}$$

D'après le th de fcts implicites

$\exists$ un voisinage I de z_0

$\exists$ un voisinage W de (x_0, y_0)

et $\exists$ un fct φ $W \to I$ de C^1 tq

$z_0 = \varphi(x_0, y_0)$ et :

$$\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ (x,y) \in W \text{ et } z \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \varphi(x_0, y_0) \\ (x,y) \in W \text{ et } z \in I \end{cases}$$

on sait que : $\forall (x,y) \in W$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f/\partial x\,(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \end{cases}$$

soit $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$G(x,y) = g(x,y,\varphi(x,y))$

Posons $k(x,y) = (x,y,\varphi(x,y))$

Alors $G(x,y) = g \circ k(x,y)$

Mq G est de C^1 sur W :

on a : (*) $k(x,y) = (x,y,\varphi(x,y))$ est de C^1 sur W car ses composantes

$$\begin{cases} k_1(x,y) = x \\ k_2(x,y) = y \\ k_3(x,y) = \varphi(x,y) \end{cases}$$ sont de C^1 sur W

(**) $k(W) \subset V$:

En effet, $\forall (x,y) \in W$:

$\varphi(x,y) \in I$, Donc $\forall (x,y) \in W$

$(x,y,\varphi(x,y)) \in W \times I$ or $W \times I = V$

D'où : $\forall (x,y) \in W,\ k(x,y) \in V$.

Finalement, $k(W) \subset V$

(***) g est de C^1 sur V

D'après (*), (**), (***) on a G est de C^1 sur W

Application :

Determinons $J_G(x,y)$

on a $G(x,y) = g \circ k(x,y)$ Donc :

$J_G(x,y) = J_g(k(x,y)) \times J_k(x,y)$

or on a $J_g(k(x,y)) = \frac{\partial g}{\partial x}(k(x,y))\ \frac{\partial g}{\partial y}(k(x,y))\ \frac{\partial g}{\partial z}(k(x,y))$

$k(x,y) = (x,y,\varphi(x,y))$

et $J_k(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

Par suite :

$J_G(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(k(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(k(x,y)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial y}(k(x,y)) + \frac{\partial g}{\partial z}(k(x,y)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial}(x,y)$

on en déduit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\ \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \end{cases}$$

Donc, si (x_0, y_0) est un extremum local de G alors

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \times \frac{\partial g}{\partial z}(a) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(a) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \times \frac{\partial g}{\partial z}(a) = 0 \end{cases}$$

Comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a)}{\frac{\partial f}{\partial z}(a)} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial f(a)}{\partial y}}{\frac{\partial f(a)}{\partial z}} \end{cases}$$

Exo2 : Examen 2018-2019

(2) on a :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 39$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 6xy - 36$$

La différentiable de h

$$dh(x, y)(u, v) = 3(x^2 + y^2 - 13)u + 6(xy - 6)v$$

(3) - Les points critiques de h sont les solution du système :

$$(*) : \begin{cases} x^2 + y^2 - 13 = 0 \\ xy - 6 = 0 \end{cases}$$

on a

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{36}{x^2} - 13 = 0 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \\ y = \frac{6}{x} \end{cases}$$

Pour (ε) posons $X = x^2$

on a donc $X^2 - 13X + 36 = 0$

$$\Delta = (13)^2 - 4 \times 36 = 25 > 0$$

Alors (ε') admet deux solution

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13+5}{2} = 9 \\ x_2 = \frac{13-5}{2} = 4 \end{cases}$$

par suite (ε) admet quatres solution

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = +2 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

D'où h admet 4 points critiques

$(3, 2)$, $(-3, -2)$, $(2, 3)$ et $(-2, 3)$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 39 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 6xy - 36 \end{cases}$$

(4) on a :

$$\begin{cases} r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x \\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x y} = 6y \\ t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 6x \end{cases}$$

$$\Delta = s^2 - rt = 36y^2 - 36x^2$$
$$= 36(y^2 - x^2)$$

(5) - pour $A(3, 2)$ on a :

$$\Delta_1 = 36(4 - 9) < 0 \text{ et } r_0 = 18 > 0$$

donc h admet un minimum local en $(3, 2)$

Pour $B(-3, -2)$ on a :

$$\Delta_B = 36(4 - 9) < 0 \text{ et } r_B = -18 < 0$$

Donc h admet un maximum local en $(-3, -2)$

Pour $C(2, 3)$ et $D(-2, -3)$

Donc $(2, 3)$ et $(-2, -3)$ sont deux pts selles pour h.

(6) on a :

(*) - $h(0,0)=0$

(**) - h est de C^1 sur $\mathbb{R}^2$

(***) - on a $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -36 \neq 0$

Donc d'après T.F.I :

$\exists$ un voisinage I de 0

$\exists$ un voisinage J de θ

et $\exists$ une fct $\varphi : I \to J$ de C^1

tq : $\varphi(0) = 0$ et $\begin{cases} h(x,y)=0 \\ x \in I \text{ et } y \in J \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi(x) \\ x \in I, J \in I \end{cases}$ + —

D'où, T est un arc paramétrique au voisinage de $(0,0)$.

(7) La matrice jacobienne de h :

$$J_h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3(x^2+y^2-13) & 6(xy-6) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

on en déduit donc :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\ddot{J}_h(x,y) = 3(x^2+y^2-13) - 6(xy-6)$$
$$= 3(x^2+y^2-2xy-13+12)$$
$$= 3((x-y)^2-1)$$

UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

CP-II, Semestre 3	Devoir Surveillé d'Analyse 3	Année 2018/2019
19 décembre 2018 , durée : 2h.		Prof: F.MORADI

N.B: il sera tenu compte de la Rédaction et de la Clarté de la Réponse "RCR".

Exercice 1 : (9points)

Pour $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *et* $p > 1$*, on définit:*

$$\|X\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

L'objectif de cette exercice est de démontrer que $\|.\|_p$ ***est une norme sur*** $\mathbb{R}^2$***.***

1. *Soit* $(u, v, p, q) \in (\mathbb{R}^{+*})^4$ *avec :* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

   1.a) *Sachant que la fonction logarithme est concave :* $(\forall 0 \leq t \leq 1)(\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2)$ *on a* $log(ta + (1-t)b) \geq t\, loga + (1-t)\, logb$, *montrer que :* **1pt**

   $$ta + (1-t)b \geq a^t * b^{1-t}$$

   1.b) *En déduire que:* **1pt**

   $$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

2. *Soit* $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^4$*, on suppose que :* $u_1{}^p + u_2{}^p = 1$ *et* $v_1{}^q + v_2{}^q = 1$. **1pt**
   Montrer que: $u_1 v_1 + u_2 v_2 \leq 1$.

3. ***Inégalité de Holder :***
   Soit $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^4$.

   3.a) *Pour* $i \in \{1,2\}$ *posons:* **1pt**

   $$u_i = \frac{a_i}{(a_1{}^p + a_2{}^p)^{\frac{1}{p}}} \quad , \quad v_i = \frac{b_i}{(b_1{}^q + b_2{}^q)^{\frac{1}{q}}}$$

   Montrer que :
   $u_1{}^p + u_2{}^p = 1$ *et* $v_1{}^q + v_2{}^q = 1$

1pt	3.b) *En déduire que:* $\displaystyle a_1b_1 + a_2b_2 \leq (a_1{}^p + a_2{}^p)^{\frac{1}{p}} * (b_1{}^q + b_2{}^q)^{\frac{1}{q}}$
	4. Inégalité de Minkowski :
0.5pt	4.a) *Montrer que :* $(p-1)q = p$
1.5pt	4.b) *En décomposant* $(a_i + b_i)^p$ *de la forme suivante:* $(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)^{p-1}a_i + (a_i + b_i)^{p-1}b_i$ *montrer que:* $\displaystyle \left(\sum_{i=1}^{2}(a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{2} a_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{2} b_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}}$
2pts	5. *Démontrer que* $\\|.\\|_p$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.
	Exercice 2 : (3points) *Soit* $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction définie par :* $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
2pts	1. *Montrer que :* $\displaystyle \lim_{y \to 0}\left(\lim_{x \to 0} g(x,y)\right) = \lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} g(x,y)\right) = 0$
1pt	2. *Peut-on en déduire que :* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$? *Justifier.*
	Exercice 3 : (8points) *Considérons la fonction suivante:* $f(x,y) = \left(\dfrac{y+1}{x^2+y^2}, \dfrac{\sqrt{y}}{x}\right)$
1pt	1. *Déterminer* D_f *le domaine de définition de* f.
1.5pt	2. *Etudier la continuité de* f *sur* D_f.
3pts	3. *Etudier la différentiabilité de* f *sur* D_f.
1.5pt	4. *Déterminer la matrice jacobienne de* f.
1pt	5. *En déduire df la différentielle de* f.

BON COURAGE!